

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

Halmazok

A halmaz, a halmaz eleme

A matematikában a *halmaz*, és a *halmaz eleme* alapfogalom, ezért nem definiáljuk. Adott „dolgok” összességét akkor tekintjük halmaznak, ha egyértelműen eldönthető róluk, hogy hozzá tartoznak-e az adott halmazhoz vagy sem. Ha egy „dologra” áll a halmazt definiáló tulajdonság, akkor azt mondjuk, hogy az a halmaz eleme. Egy halmazban minden eleme pontosan egyszer szerepel.

A halmazokat általában nagybetűvel jelöljük, pl. $A, B, H, \dots$. A halmaz elemének jele: $\in$, ha valami nem eleme az adott halmaznak, azt általában így jelöljük: $\notin$. Például: $a \in A$, $b \notin B$ esetleg $C \ni c$.

Halmazok megadása

► Felsorolással: kapcsos zárójelben az elemeket pontos vesszővel elválasztva (a felsorolások különböző sorrendje nem ad különböző halmazt), például: $A = \{1; 3; 5; 6\}$, $B = \{3; 6; 9; \dots; 300\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$.

► A halmazt definiáló tulajdonság megadásával, amely történhet szövegesen, például: $B = \{10\text{-nél kisebb pozitív páros számok}\}$, vagy szimbólumokkal, például:

$$B = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x < 10, 2 | x\}, \text{ vagy } B = \{x = 2k | k \in \mathbb{Z}^+, x < 10\}.$$

Nevezetes számhalmazok

Néhány nevezetes számhalmaznak egyezményes jelölése van:

► $\mathbb{N}$: természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$,

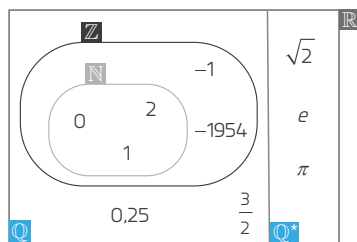
► $\mathbb{Z}$: egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$,

► $\mathbb{Q}$: racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$, azaz azon számok halmaza,

melyek felírhatók két egész szám hányadosaként, ahol a nevező nem nulla. (Másképp $\mathbb{Q}$ azon számok halmaza, amelyek tizedes tört alakja véges, vagy végtelen szakaszos.),

► $\mathbb{Q}^*$ (vagy I): irracionális számok halmaza: azon számok halmaza, melyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. (Másképpen $\mathbb{Q}^*$ azon számok halmaza melyek tizedes tört alakja végtelen, nem szakaszos.),

► $\mathbb{R}$: valós számok halmaza ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$).



A nevezetes számhalmazok szemléltetése néhány elemükkel

Ezekből képezhető több, gyakran használt jelölés is, például:

- ▶ $\mathbb{Z}^+$: a pozitív egész számok halmaza
- ▶ $\mathbb{R}_0^-$: a nem pozitív valós számok halmaza

Véges és végtelen halmazok, halmazok számossága

Definíció: Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, *üres halmaznak* nevezzük. Jele: $\emptyset$ vagy $\{\}$.

Definíció: Ha egy halmaznak véges sok eleme van (tehát elemeinek száma egy természetes számmal megadható), akkor *véges halmaznak* nevezzük.

Definíció: Ha egy halmaz elemeinek a száma nem adható meg egy természetes számmal, akkor azt a halmazt *végtelen halmaznak* nevezzük.

Definíció: Egy véges halmaz elemeinek számát a halmaz számosságának nevezzük. Az A halmaz számosságát $|A|$ jelöli.

Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 7\}$ halmaz véges, és $|A| = 8$; a $B = \mathbb{R}^+$ halmaz végtelen.

Feladat (I.): Az alábbiak közül válassza ki azon halmazok betűjelét, melyek az üres halmazt adják meg! (2 pont)

$$A = \{2\text{-nél nagyobb, páros príme}\}$$

$$B = \{\emptyset\}$$

$$C = \{ \text{az } x^2 - 10x + 26 = 0 \text{ egyenlet valós megoldásai} \}$$

$$D = \{a \in \mathbb{N} \mid 0 < a \leq 1\}$$

$$E = \{ \}$$

✓ **Megoldás:**

A, C, E

Ha csak két helyes választ jelöl meg, 1 pontot kap. Ha helytelen választ is megjelöl, nem kap pontot.

2 pont

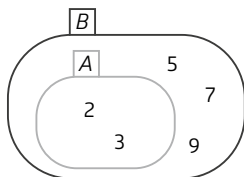
Halmazok közötti relációk

Definíció: Két halmaz *egyenlő*, ha ugyanazok az elemeik.

Példa: Az $A = \{2; 3; 5; 7\}$ és $B = \{\text{egyjegyű pozitív príme}\}$ halmazok esetén $A = B$.

Definíció: Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is. Jele: $\subseteq$.

Példa: Ha $A = \{2; 3\}$ és $B = \{2; 3; 5; 7; 9\}$, akkor $A \subseteq B$.



Definíció: Egy A halmaz *valódi részhalmaza* B -nek, ha A részhalmaza B -nek, de B -nek van olyan eleme, mely nem eleme A -nak. Jele: $\subset$.

Példa: Ha $A = \{2; 4\}$ és $B = \{2; 4; 5\}$, akkor $A \subset B$.

A részhalmaz fogalmából adódó legfontosabb tulajdonságokat az alábbi tételek foglalják össze.

Tétel:

- ▶ Bármely halmaz részhalmaza önmagának, $A \subseteq A$.
- ▶ Bármely halmaznak részhalmaza az üres halmaz, $\emptyset \subseteq A$.
- ▶ Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.
- ▶ Ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.
- ▶ Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

Tétel: Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Feladat (II./A): Az alábbi halmazok közül némelynek valamely valódi részhalmaza is szerepel a felsoroltak között. Adja meg az alábbi halmazok között fennálló összes valódi részhalmaz viszonyt! (5 pont)

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \mid x \text{ és } x > 3\}$$

$$B = \{\text{egyjegyű pozitív prímszámok}\}$$

$$C = \{5\}$$

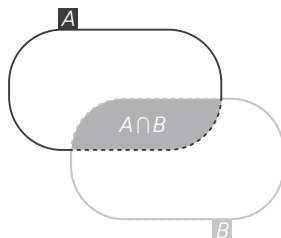
$$D = \{1; 2; \dots; 10\}$$

✓ **Megoldás:**

Ábrázoljuk a halmazokat Venn-diagramon!	1 pont
Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.	
Ekkor látható, hogy $B \subset D$, $C \subset D$, $C \subset B$, $C \subset A$.	4 pont
Kapcsolatonként 1-1 pont jár. Ha részhalmaz jelet használ, maximális pontot kap.	
Összesen:	5 pont

Műveletek halmazokkal

Definíció: Az A és B halmazok *metszete* (vagy *közös része*) azoknak és csak azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az A és B halmaznak is elemei. Jelölése: $A \cap B$.



Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és a $B = \{2; 3; 6; 9\}$ esetén $A \cap B = \{2; 3\}$.

Definíció: Két halmaz *diszjunkt* (vagy *idegen*), ha metszetük az üres halmaz.

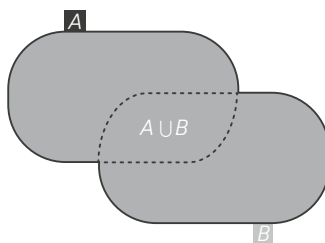
Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 2 \mid x\}$ és a $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid 2k + 1\}$ halmazok diszjunktak.

A metszet művelet legfontosabb tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges A , B és C halmazokra:

- ▶ $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- ▶ $A \cap A = A$,
- ▶ $A \cap B = B \cap A$ (a metszet művelet kommutatív),
- ▶ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (a metszet művelet asszociatív).

Definíció: Az A és B halmazok *uniója* (vagy *egyesítése*) azoknak és csak azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A -nak vagy B -nek elemei. Jelölése: $A \cup B$.



Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és a $B = \{2; 3; 6; 9\}$ esetén $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 9\}$.

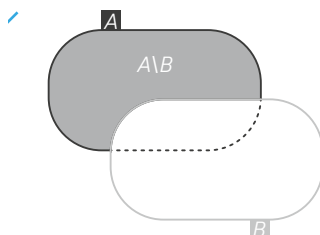
Az unió művelet legfontosabb tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges A , B és C halmazokra:

- ▶ $A \cup \emptyset = A$,
- ▶ $A \cup A = A$,
- ▶ $A \cup B = B \cup A$ (azaz a művelet kommutatív),

- ▶ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (azaz a művelet asszociatív),
- ▶ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, (az unió a metszetre nézve disztributív),
- ▶ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, (a metszet az unióra nézve disztributív).

Definíció: Az A és B halmazok *különbsége* azoknak, és csak azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A -nak elemei, de B -nek nem elemei. Jelölése: $A \setminus B$.



Példa: Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és a $B = \{2; 3; 6; 9\}$ esetén $A \setminus B = \{4; 5\}$ és $B \setminus A = \{6; 9\}$.

A különbség tulajdonságai:

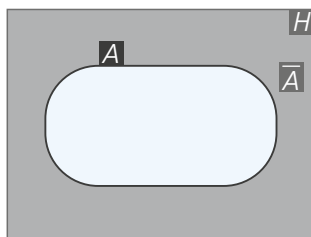
Tétel: Tetszőleges A halmazra:

- ▶ $A \setminus A = \emptyset$,
- ▶ $A \setminus \emptyset = A$,
- ▶ $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

Megjegyzés: A különbség művelet nem kommutatív és nem asszociatív.

A legtöbb feladatban adott (vagy adottnak tekintünk) egy olyan halmazt, amelynek minden vizsgált halmaz részhalmaza. Ezt a halmazt *alaphalmaznak*, vagy *univerzumnak* nevezzük.

Definíció: Legyen H az univerzum (alaphalmaz), és ennek A valamely részhalmaza! Az A *komplementer halmaza* (vagy *kiegészítő halmaza*) H azon elemeinek halmaza, melyek A -nak nem elemei. Jele: $\bar{A}$.



Példa: $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 6\}$ és az $A = \{2; 3\}$ esetén $\bar{A} = \{4; 5\}$.

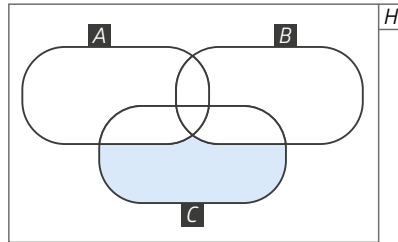
A komplementer művelet tulajdonságai:

Tétel: Tetszőleges H alaphalmaz és $A \subseteq H$ halmaz esetén:

- ▶ $\bar{H} = \emptyset$,
- ▶ $\bar{\emptyset} = H$,
- ▶ $\bar{\bar{A}} = A$.

Feladat (I.): Mely halmazművelet eredményét jelöltük az ábrán?

(2 pont)



✓ **Megoldás:**

A jelölt tartomány: $C \setminus (A \cup B)$.

Bármely más helyes megoldás is elfogadható.

2 pont

Intervallumok

Az *intervallumok* a valós számok összefüggő részhalmazai. A számegyenesen egy szakaszt, vagy félegyenest határoznak meg. Attól függően, hogy az egyes végpontok hozzátartoznak-e az intervallumhoz, adott oldalról nyitott, illetve zárt intervallumról beszélünk.

Definíció: Az $[a; b]$ *balról és jobbról zárt intervallum* az a -nál nagyobb vagy egyenlő és b -nél kisebb vagy egyenlő valós számokat jelöli. Vagyis $[a; b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$.



Definíció: Az $]a; b]$ *balról nyitott és jobbról zárt intervallum* az a -nál nagyobb és a b -nél kisebb vagy egyenlő valós számokat jelöli. Vagyis $]a; b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$.



Definíció: Az $[a; b[$ *balról zárt és jobbról nyitott intervallum* az a -nál nagyobb vagy egyenlő és a b -nél kisebb valós számokat jelöli. Vagyis $[a; b[= \{x | a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$.

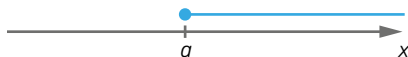


Definíció: Az $]a; b[$ *balról és jobbról nyitott intervallum* az a -nál nagyobb és a b -nél kisebb valós számokat jelöli. Vagyis $]a; b[= \{x | a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$.



Példaként definiálunk egy intervallumot, mely a számegyenes egy félegyenesét határozza meg.

Definíció: Az $[a; \infty[$ intervallum jelöli valamennyi a -nál nagyobb vagy egyenlő számot. (Az intervallum a $\infty / -\infty$ -nél mindig nyitott.) Vagyis $[a; \infty[= \{x | a \leq x, x \in \mathbb{R}\}$.



Feladat (II./B): Jelölje A a $2x+3 < 25-2x$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát, B pedig a $-x^2-8+9x \geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

- a) Határozza meg az A és B halmazokat, és ábrázolja őket közös számegyenesen! (6 pont)
- b) Határozza meg az $A \cup B$, $B \cap A$ és $B \setminus A$ halmazokat! (6 pont)
- c) Hány elemű az $(A \cup B) \cap C$ halmaz, ha C a pozitív prím számok halmaza? (4 pont)

✓ **Megoldás:**

a)		
A $2x+3 < 25-2x$ egyenlőtlenséget átrendezve, $4x < 22$ adódik, ahonnan $x < 5,5$.		1 pont
Ekkor $A =]-\infty; 5,5[$.		1 pont
Felírva a $-x^2-8+9x \geq 0$ egyenlőtlenséghez tartozó másodfokú egyenletet $-x^2+9x-8=0$ adódik. Ennek gyökei: $x_1=1$, és $x_2=8$.		1 pont
Felrajzolva az egyenlet bal oldalán található másodfokú függvény grafikonját, leolvasható az egyenlőtlenség megoldáshalmaza.		1 pont
Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.		
Innen $B = [1; 8]$.		1 pont
Az intervallumok közös számegyenesen:		1 pont
Összesen:		6 pont

b)	
$A \cup B =]-\infty; 8]$, <i>A pontszám nem bontható.</i>	2 pont
$B \cap A = [1; 5,5[$, <i>A pontszám nem bontható.</i>	2 pont
$B \setminus A = [5,5; 8]$. <i>A pontszám nem bontható.</i>	2 pont
Összesen:	6 pont

c)	
Mivel $(A \cup B) \cap C = \{2; 3; 5; 7\}$, <i>A pontszám nem bontható.</i>	2 pont
így az $(A \cup B) \cap C$ halmaznak 4 eleme van. <i>A pontszám nem bontható.</i>	2 pont
Összesen:	4 pont

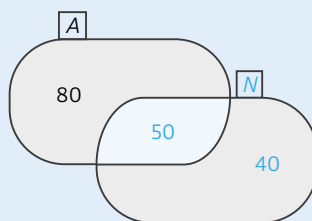
Logikai szita

Tétel: Bármely két, A és B (véges) halmazra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, valamint tetszőleges A , B és C halmazok esetén: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

Feladat (II./A): Egy iskola 9. évfolyamán idegen nyelvként angol, vagy német választható. Tudjuk, hogy mindenki tanul legalább egy nyelvet, németül 90-en, angolul 130-an, angolul és németül is 50-en tanulnak. Hányan járnak a 9. évfolyamra? (6 pont)

✓ Megoldás:

Legyen A azoknak a halmaza, akik tanulnak angolul, N pedig azoké, akik tanulnak németül. <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>	1 pont
Készítsünk a feladathoz Venn-diagramot! Ekkor $ A = 130$, $ N = 90$, $ A \cap N = 50$, keressük $ A \cup N $ értékét.	2 pont
A logikai szita szerint: $ A \cup N = A + N - A \cap N = 130 + 90 - 50 = 170$.	2 pont
A 9. évfolyamra 170 fő jár.	1 pont
Összesen:	6 pont



Ponthalmazok

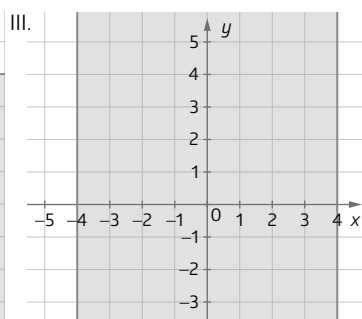
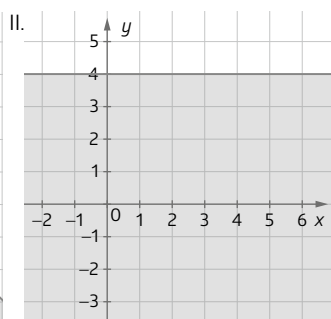
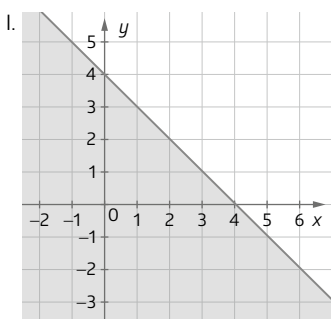
Ponthalmazok a koordináta-rendszerben

Feladat (I.): Párosítsa az alábbiakban megadott, illetve a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt ponthalmazokat! (2 pont)

$$A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y \leq 4\}$$

$$B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 4\}$$

$$C = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq 4\}$$



✓ **Megoldás:**

A – II. B – I. C – III.

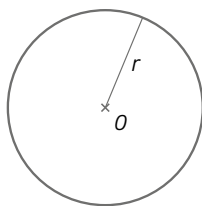
2 pont

Nevezetes ponthalmazok

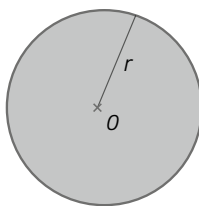
Definíció: A *kör* (körvonal) azon pontok halmaza a síkban, melyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő (nem nulla) távolságra vannak. A kör középpontját a körvonal valamely pontjával összekötő szakasz a kör sugara.

Definíció: A (zárt) *körlap* egy adott ponttól (a középponttól) egy adott távolságnál (a sugárnál) kisebb vagy egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon.

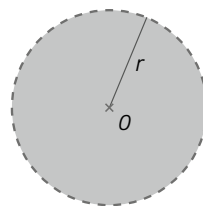
Definíció: A *nyílt körlap* egy adott ponttól (a középponttól) egy adott távolságnál (a sugárnál) kisebb távolságra lévő pontok halmaza a síkon.



Kör(vonal)



Zárt körlap

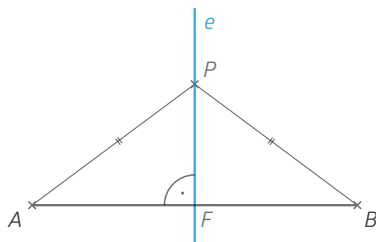


Nyílt körlap

Definíció: A szakasz felezőpontján áthaladó, a szakaszra merőleges egyenest *szakaszfelező merőlegesnek* nevezzük.

Tétel: A szakaszfelező merőleges pontjainak halmaza megegyezik a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra, a szakasz síkjában lévő pontok halmazával.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy ha egy pont illeszkedik egy szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére, akkor az a végpontoktól egyenlő távolságra van, illetve, ha egy pont egyenlő távolságra van egy szakasz két végpontjától, akkor az illeszkedik a szakasz szakaszfelező merőleges egyenesére.

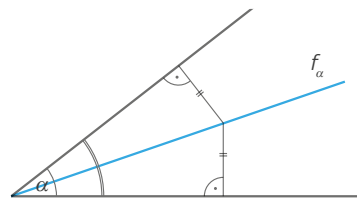


A szakaszfelező merőleges egyenes pontjai egyenlő távolságra vannak a szakasz két végpontjától

Definíció: A szögfelező a szöget két egyenlő részre osztó félegyenes, melynek kezdőpontja a szög csúcsa.

Tétel: Egy konvex szög szögfelezője pontjainak halmaza megegyezik a szög két szárától egyenlő távolságra, a szög síkjában lévő pontok halmazával.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy ha egy pont illeszkedik egy szög szögfelező félegyenesére, akkor az a pont egyenlő távolságra van a szög két szárától, illetve, ha egy konvex szögtartományban egy pont egyenlő távolságra van a két szárától, akkor az a pont illeszkedik a szög szögfelező félegyenesére.



A szögfelező félegyenes pontjai egyenlő távol vannak a szög két szárától

Feladat (II./A): Adott a koordináta-rendszerben az $A(3; 2)$ és a $B(-5; 6)$ pont. Határozza meg, hogy a $-3x + 4y = 14$ egyenletű egyenes mely pontja van egyenlő távolságra az A és B pontoktól! (12 pont)

✓ **Megoldás:**

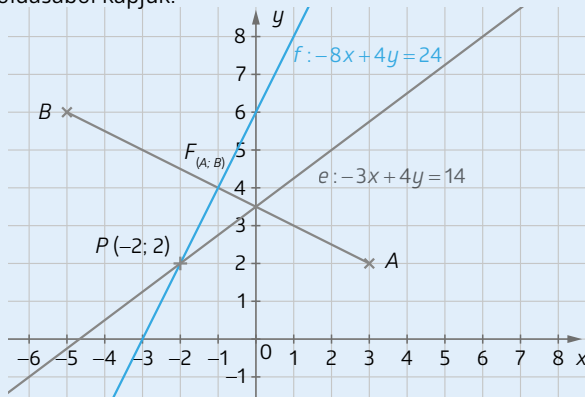
Az A és B pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon az AB szakasz szakaszfelező merőleges egyenese.

1 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái: $F\left(\frac{3+(-5)}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = F(-1; 4)$.

1 pont

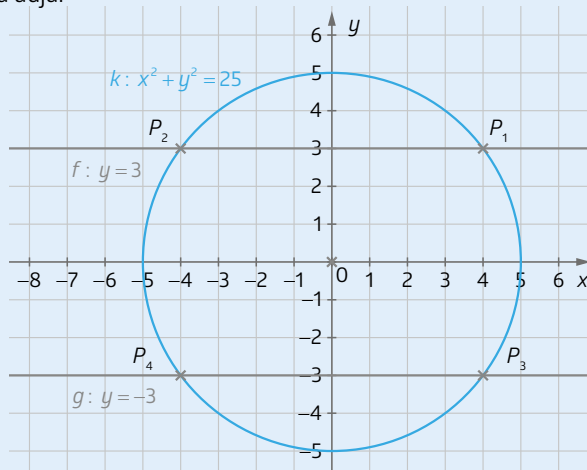
A felírandó AB szakaszfelező merőleges egyenesének egy normálvektora az $\overline{AB}((-5)-3; 6-2)$.	1 pont
$\overline{AB}(-8; 4)$	1 pont
Az AB szakasz szakaszfelező merőleges egyenesének egyenlete: $f: -8x + 4y = (-8) \cdot (-1) + 4 \cdot 4$, azaz	1 pont
$f: -8x + 4y = 24$.	1 pont
A keresett pont koordinátáit az e és f egyenesek egyenletéből álló lineáris egyenlet-rendszer megoldásából kapjuk.	1 pont
	
Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.	
$\begin{cases} -3x + 4y = 14 \\ -8x + 4y = 24 \end{cases} \rightarrow y = \frac{24+8x}{4} = 6+2x$	1 pont
Ezt az első egyenletbe behelyettesítve: $-3x + 4(6+2x) = 14$ adódik, ahonnan	1 pont
$24 + 5x = 14$, innen pedig $x = -2$.	1 pont
Ekkor $y = 6 + 2 \cdot (-2) = 2$.	1 pont
A keresett pont: $P(-2; 2)$.	1 pont
Összesen:	12 pont

Feladat (II./A): Határozza meg azon pontok koordinátáit a derékszögű koordináta-rendszerben, melyek az x tengelytől 3, az origótól pedig 5 egység távolságra vannak! **(13 pont)**

✓ **Megoldás:**

Az x tengelytől 3 egységre lévő pontok az $y=3$ és az $y=-3$ egyenletű egyeneseken helyezkednek el.	2 pont
Az origótól 5 egységre lévő pontok halmaza a síkon az origó középpontú, 5 egység sugarú k kör.	1 pont
Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.	
Ennek egyenlete: $k: x^2 + y^2 = 25$.	1 pont

A keresett pontok koordinátáit az $\begin{cases} y=3 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ és az $\begin{cases} y=-3 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása adja.



1 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Az első egyenletrendszerből az $x^2 + 3^2 = 25$ egyenlet adódik behelyettesítéssel, ahonnan $x^2 = 16$, vagyis $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

2 pont

Innen a keresett pontok: $P_1(4; 3)$ és $P_2(-4; 3)$.

Megoldásonként 1-1 pont jár

2 pont

Az második egyenletrendszerből az $x^2 + (-3)^2 = 25$ egyenlet adódik behelyettesítéssel, ahonnan $x^2 = 16$, vagyis $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

2 pont

Megoldásonként 1-1 pont jár.

Innen a keresett pontok: $P_3(4; -3)$ és $P_4(-4; -3)$.

Megoldásonként 1-1 pont jár.

2 pont

Összesen:

13 pont

Matematikai logika

Az ítéletkalkulus fogalmai

Definíció: Azokat a kijelentő mondatokat, melyekről egyértelműen el lehet dönteni, hogy igazak vagy hamisak, *ítéleteknek*, *állításoknak* vagy *kijelentéseknek* nevezzük. Az ítéleteket nagybetűvel írjuk. Az ítélet igaz, vagy hamis voltát az ítélet logikai értékének nevezzük. Jele pl.: $|A|$ jelöli, hogy az A állítás logikai értéke igaz.

Példa:

- ▶ A : A három prímszám. Ez az állítás igaz, vagyis $|A|=i$.
- ▶ B : A paralelogramma átlói merőlegesek egymásra. Ez az állítás hamis (hiszen úgy értjük, hogy minden paralelogramma átlói merőlegesek egymásra), vagyis $|B|=h$.

Feladat (I.): Az alábbi állítások mindegyikéről döntse el, hogy igaz-e, vagy hamis! (3 pont)

- ▶ A: Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 5-tel.
- ▶ B: Bármely két prímszám összege páros.
- ▶ C: Az 1 cm sugarú kör területe fele a 2 cm sugarú kör területének.

✓ **Megoldás:**

A: igaz; B: hamis; C: hamis. ($|A|=i$; $|B|=h$; $|C|=h$.)

Helyes válaszonként 1-1 pont jár.

3 pont

Logikai műveletek

Állításokból például azok tagadásával vagy különböző kötőszavakkal való összekapcsolásával újabb, összetett állításokat tudunk előállítani. Ilyenkor az ítéleteken logikai műveleteket végzünk. A művelet *igazságtáblázata* írja le azt, hogy egy adott művelet adott logikai értékű ítéletekből milyen logikai értékű összetett állításokat képez. Logikai műveletet az igazságtáblázatával definiálunk.

Negáció (tagadás)

Egy A kijelentés negációjának jele $\neg A$. Olvasata: „nem A”.

Igazságtáblázata:

A	$\neg A$
i	h
h	i

■ **Példa:** A: A kettő prímszám. $\neg A$: A kettő nem prímszám.

Feladat (I.): Az alábbi állítások között néhánynak a tagadása is szerepel. Melyek ezek, és melyiknek mi a tagadása? (2 pont)

- ▶ A: Minden tehén foltos.
- ▶ B: Van nem foltos tehén.
- ▶ C: Nem minden tehén foltos.
- ▶ D: Ha egy állat foltos, akkor az tehén.

✓ **Megoldás:**

A tagadása B.

A tagadása C.

B tagadása A.

C tagadása A.

2 helyes kapcsolat ér 1-1 pontot.

2 pont

Konjunkció (és)

Az A , illetve B állítás konjunkciójának jele $A \wedge B$. Olvasata: „ A és B ”.

Igazságtáblázata:

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Megjegyzés: Az „és” kötőszón kívül gyakran használják még a *s, ám, meg, de* stb. kötőszavakat is.

Példa: A : Péntek van. B : Fúj a szél. $A \wedge B$: Péntek van és fúj a szél.

Diszjunkció (vagy)

Az A , illetve B állítás diszjunkciójának jele $A \vee B$. Olvasata: „ A vagy B ”.

Igazságtáblázata:

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Megjegyzés: A vagy itt, és a matematikában legtöbbször, úgynevezett „megengedő vagy”. Ez azt jelenti, hogy akár csak az egyik, akár csak a másik, de akár mindkettő állítás is teljesülhet. Létezik úgynevezett „kizáró vagy” is, amely egyszerre csak az egyik állítás teljesülését engedi meg. A magyar nyelvben ezt leginkább hangsúllyal, esetleg a vagy-vagy kötőszóval fejezzük ki.

Példa: A : Péntek van. B : Fúj a szél. $A \vee B$: Péntek van vagy fúj a szél.

Feladat (I.): Tudjuk, hogy Anna este nem volt moziban, és elkészítette a házi feladatát. Az alábbi állítások mindegyikéről döntse el, hogy igaz-e, vagy hamis! **(4 pont)**

- ▶ A : Anna este moziban volt.
- ▶ B : Anna este elkészítette a házi feladatát, vagy moziban volt.
- ▶ C : Anna este elkészítette a házi feladatát, és nem volt moziban.
- ▶ D : Anna este a moziban készítette el a házi feladatát.

✓ Megoldás:

A : hamis, B : igaz, C : igaz, D : hamis.

Helyes válaszonként 1-1 pont jár.

4 pont

Implikáció (ha ..., akkor ...)

Jele $A \rightarrow B$. Olvasata: „ha A , akkor B ” vagy „ A implikálja B -t”.

Igazságtáblázata:

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Megjegyzés: A -t szokás az implikáció előtagjának nevezni, míg B -t az utótagjának. Az igazságtáblázatból megfigyelhető, hogy az implikáció csak akkor hamis, ha az előtag igaz, de az utótag mégis hamis.

Példa: Az $A \rightarrow B$ -t olvashatjuk így is: „ A elégséges B -hez” (A elegendő feltétele B -nek), illetve „ B szükséges A -hoz” (B szükséges feltétele A -nak). Szemléltetésként tekintsük az A : *Fúj a szél.* B : *Mozognak a fák levelei.* ítéleteket. Ekkor az $A \rightarrow B$: *Ha fúj a szél, akkor mozognak a fák levelei.* Ekkor az, hogy fúj a szél, elegendő ahhoz, hogy mozogjanak a fák levelei. Ahhoz pedig, hogy tudjuk, hogy fúj a szél, szükséges, hogy mozogjanak a fák levelei, mivel mozdulatlan levelek esetén biztos nem fúj a szél. Azonban az, hogy mozognak a fák levelei, nem elegendő ahhoz, hogy tudjuk, fúj a szél, hiszen például egy a fa törzsét rázó ember is lehet az ok.

Feladat (I.): Tekintsük az alábbi állítást:

A : Az a háromjegyű pozitív egész szám osztható 12-vel.

Az alábbi B , C , D állítások mindegyikénél jelölje, hogy az adott állítás A -nak szükséges (de nem elegendő), elegendő (de nem szükséges), vagy szükséges és elegendő feltétele-e!

(3 pont)

- ▶ B : Az a szám osztható 24-gyel.
- ▶ C : Az a szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- ▶ D : Az a szám osztható 3-mal és 4-gyel.

✓ **Megoldás:**

B elegendő feltétele A -nak.	1 pont
C szükséges feltétele A -nak	1 pont
D szükséges és elegendő feltétele A -nak.	1 pont
Összesen:	3 pont

Megjegyzés: Ha egy implikációban felcseréljük az előtagot és az utótagot, akkor az implikáció megfordítását kapjuk. Például a „Ha fúj a szél, akkor mozognak a fák levelei.” állítás megfordítása: „Ha mozognak a fák levelei, akkor fúj a szél.”

Feladat (I.): Tekintsük az alábbi állítást:

A: Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor téglalap.

Fogalmazza meg az A állítás megfordítását! Adja meg az A állítás, és az A állítás megfordításának logikai értékét! **(3 pont)**

✓ **Megoldás:**

Az A állítás megfordítása: Ha egy négyszög téglalap, akkor középpontosan szimmetrikus. <i>Más, helyes megfogalmazás (pl. A téglalap középpontosan szimmetrikus.) is elfogadható.</i>	1 pont
Az A állítás hamis.	1 pont
Az A állítás megfordítása igaz.	1 pont
Összesen:	3 pont

Ekvivalencia (akkor, és csak akkor, pontosan akkor)

Jele $A \leftrightarrow B$. Olvasata: „A akkor és csak akkor, ha B”.

Igazságtáblázata:

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Példa: A: Az a egész szám osztható 10-zel. B: Az a egész szám utolsó számjegye 0.

$A \leftrightarrow B$: Az a egész szám akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha utolsó számjegye 0.

Feladat (I.): Válassza ki az alábbi állítások közül az ekvivalenseket!

- ▶ A: Az ABCD négyszög átlói merőlegesek egymásra.
- ▶ B: Az ABCD négyszög középpontosan szimmetrikus.
- ▶ C: Az ABCD négyszög paralelogramma.

(2 pont)

✓ **Megoldás:**

B és C ekvivalensek ($B \leftrightarrow C$).	2 pont
--	--------

Kombinatorika

A kombinatorika „a véges halmazok tudománya”. Az elemi kombinatorika vizsgálati tárgyát véges számú elem sorba rendezése, illetve véges számú elemből néhány kiválasztása adja. Bár a kombinatorika tárgyköre ennél jóval szélesebb, a középszintű érettségi vizsgán csak néhány, ún. alapvető összeszámlálási módszert kell ismerni, illetve az ezek olykor összetett alkalmazására vezető problémát kell megoldani.

Permutációk

Definíció: n elem egy adott sorrendjét, ezen elemek *permutációjának* nevezzük. Ha az elemek mind különbözőek, *ismétlés nélküli permutációról* beszélünk.

Tétel: n különböző elem összes permutációinak száma: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Definíció: $0! = 1$, $1! = 1$.

Feladat (I.): Egy úszóverseny döntőjében hatan értek célba. Hányféleképpen alakulhat a befutók sorrendje, ha nincs holtverseny? (2 pont)

✓ **Megoldás:**

Az első helyen hatuk közül bárki beérkezhetett. A második helyet már csak a maradék öt ember közül szerezhette meg valaki, s a többi helyezésnél hasonlóképpen; mindíg az előzőnél eggyel kevesebb a lehetőségek száma az adott helyzetre. Mivel ezen lehetőségek függetlenek egymástól (az első után bárki befuthat a többiek közül, és így tovább a többi helyzetre is), így az összes lehetőségek száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 (= 6!)$.	2 pont
--	--------

Kevésbé részletes gondolatmenet is maximális pontot ér.

Feladat (I.): Öt fiú, Andor, Balázs, Csaba, Dénes és Erik felsorakozott. Tudjuk, hogy Andor áll a sor legvégén, és azt is, hogy Balázs közvetlenül Dénes előtt áll. Hány különféle sorrendben állhatnak a fiúk? Adja is meg ezeket a sorrendeket! (4 pont)

✓ **Megoldás:**

Mivel András a sor végén áll, vele gyakorlatilag nem is kell számolnunk. A maradék négy fiú közül Balázs közvetlenül Dénes előtt áll, így őket sorrend szempontjából tekinthetjük egynek. Ekkor tulajdonképpen már csak hárman vannak. Sorrendjeik száma ekkor: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.	2 pont
Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. A lehetséges sorrendek a következők (a fiúkat nevük kezdőbetűjével jelöltük): B, D, Cs, E, A B, D, E, Cs, A Cs, B, D, E, A E, B, D, Cs, A Cs, E, B, D, A E, Cs, B, D, A	2 pont
Ha csak 3 jó sorrendet ír, nem kap pontot. 4 vagy 5 jó sorrend 1 pontot ér.	
Összesen:	4 pont

Definíció: Adott n elem, amelyekből $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ egyforma. Ezen elemek egy sorrendjét n elem $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ ismétlési tényezőjű *ismétléses permutációjának* nevezzük.

Tétel: n elem $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ ismétlési tényezőjű ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Feladat (I.): Egy hétjegyű telefonszám a 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, számjegyekből áll, csak azt nem tudjuk, hogy milyen sorrendben. Hány ilyen telefonszám lehetséges? **(3 pont)**

✓ **Megoldás:**

A lehetséges telefonszámok száma: $\frac{7!}{3! \cdot 4!}$.

2 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Így 35 a feltételeknek megfelelő telefonszám lehetséges.

1 pont

Összesen:

3 pont

Variációk

Definíció: Adott n különböző elem. Az ezekből tetszőlegesen kiválasztott k különböző elem egy permutációját az n elem k -ad osztályú *ismétlés nélküli variációjának* nevezzük. (Azaz ezek száma azt mutatja meg, hogy n különböző elemből hányféleképpen tudunk kiválasztani k különböző elemet, ha a kiválasztás sorrendjére is tekintettel vagyunk.)

Tétel: n elem k -ad osztályú *ismétlés nélküli variációinak* száma:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Feladat (I.): Egy 28 fős osztály választ először egy osztályelnököt, majd egy elnökhelyettest. Hány különböző kimenetele van a választásnak, ha ugyanaz a személy nem töltheti be mindkét pozíciót egyszerre? **(2 pont)**

✓ **Megoldás:**

Az elnök bárki lehet a 28 diák közül, míg a helyettese az elnök személyétől függetlenül a maradék 27 fő bármelyike lehet. Így a lehetőségek száma: $28 \cdot 27 = 756$.

2 pont

Kevésbé részletes gondolatmenet is maximális pontot ér.

Definíció: Adott n különböző elem. Ha az n elemből kiválasztott k elem között az n elem bármelyike többször is ismétlődhet, akkor az így nyert variációt n elem k -ad osztályú *ismétléses variációjának* nevezzük.

Tétel: n elem k -ad osztályú *ismétléses variációinak* száma: n^k .

Feladat (I.): Egy pénzérmével háromszor dobunk egymás után. Hány különböző dobásorozat alakulhat ki, ha a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük? **(2 pont)**

✓ **Megoldás:**

Egy dobásnak két különböző kimenete lehet (nevezzük ezeket fejnek és írásnak). Az első dobás eredménye tehát kétféle lehet, a másodiké ettől függetlenül szintén kétféle, akár csak a harmadik dobásé. Így az összes lehetséges kimenetel száma $2^3 = 8$.

2 pont

Kevésbé részletes gondolatmenet is maximális pontot ér.

Feladat (II./A): A 9, 8, 7, 6, 5, 4 számjegyek felhasználásával háromjegyű pozitív egész számokat képeztünk, egy számjegyet többször is felhasználhatunk. Ezek között hány olyan van amely

- a) csupa különböző számjegyből áll, (2 pont)
 b) nem osztható 5-tel, (5 pont)
 c) osztható 4-gyel? (5 pont)

✓ **Megoldás:**

a)	
Az első helyen hatféle számjegy szerepelhet. A másodikikon már csak öt, míg a harmadikon négy, egymástól függetlenül. Így a lehetőségek száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Kevésbé részletes gondolatmenet is maximális pontot ér.	2 pont

b)	
I. megoldás:	
A komplementer leszámolás módszerét követve számoljuk össze az öttel osztható számok számát. Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.	1 pont
Ekkor az első két helyi értéken 6-6-féle számjegy állhat, míg az utolsón csak egy, az 5.	1 pont
Ezen lehetőségek száma: $6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$.	1 pont
Az összes lehetőségek száma: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.	1 pont
Az 5-tel nem osztható számok száma: $216 - 36 = 180$.	1 pont
Összesen:	5 pont
II. megoldás:	
Ha a szám nem osztható 5-tel, akkor nem 5-re végződik.	1 pont
Ekkor az utolsó helyi értéken csak ötféle számjegy állhat (9, 8, 7, 6, 4).	1 pont
Az első két helyi értéken 6-6-féle számjegy állhat.	1 pont
Az 5-tel nem osztható számok száma: $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$.	2 pont
Összesen:	5 pont

c)	
Egy legalább kétjegyű pozitív egész szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4-gyel. Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.	1 pont
Így a szám lehetséges végződése: 44, 48, 56, 64, 68, 76, 84, 88, 96.	1 pont
Ez 9 lehetőség.	1 pont
Az első helyi értéken bármelyik számjegyük állhat.	1 pont
Az 4-gyel osztható számok száma: $6 \cdot 9 = 54$.	1 pont
Összesen:	5 pont

Feladat (I.): Hány különböző, háromjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 7 számjegyek felhasználásával, ha

a) a jegyek ismétlődhetnek,

(2 pont)

b) minden számjegy pontosan egyszer szerepel

(2 pont)

✓ **Megoldás:**

a)

Az első helyen (a százask helyén) 0 nem állhat, így ott csak kétféle számjegy szerepelhet. A többi helyi értéken pedig ettől, és egymástól függetlenül mindegyik számjegy állhat, így a lehetőségek száma: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

2 pont

Kevésbé részletes gondolatmenet is maximális pontot ér.

b)

Az első helyen (a százask helyén) 0 nem állhat, így ott csak kétféle számjegy szerepelhet. A következő helyi értéken is csak kétféle számjegy állhat, hiszen szerepelhet ugyan a 0, de az, amit az első helyre írtunk, már nem. Így az utolsó helyiértéken már csak egyféle számjegy állhat, vagyis a lehetőségek száma: $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

2 pont

Kevésbé részletes gondolatmenet is maximális pontot ér.

Kombinációk

Definíciók: Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait, n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. (Azaz ezek száma azt mutatja meg, hogy n különböző elemből hányféleképpen tudunk kiválasztani k különböző elemet, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

Definíció: Ha n és k természetes számok ($n \geq k$), akkor az $\binom{n}{k}$ alakú kifejezéseket *binomiális együtthatóknak* nevezzük, és $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ módon értelmezzük.

Megjegyzés: Az $\binom{n}{k}$ kifejezést „ n alatt a k ”-nak olvassuk.

A binomiális együtthatók néhány fontos tulajdonságát az alábbi tétel foglalja össze.

Tétel: n és k természetes számok ($n \geq k$). Ekkor:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Tétel: n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Feladat (I.): Orvosi szűrővizsgálaton a 26 fős osztályból az első csoportban 6-an mennek be az orvosi rendelőbe. Hányféleképpen választhatjuk ki az osztály tanulói közül az első csoportba tartozókat? A választ egyetlen számmal adja meg! (2 pont)

✓ **Megoldás:**

$$\text{A kiválasztások száma: } \binom{26}{6} = \frac{26!}{6! \cdot 20!} = 230\,230.$$

2 pont

Feladat (II./B): Egyik héten az ötös lottó sorsolásán kihúzott számok szorzata páros lett. Hányféleképp lehetséges ez? (Az ötös lottó sorsolásán az 1–90 számokból húznak ki ötöt.) (8 pont)

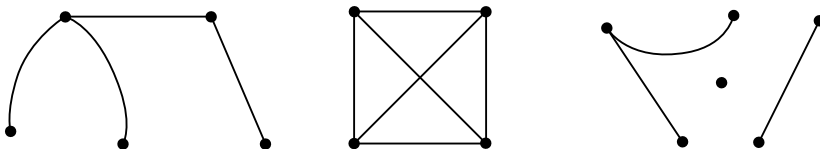
✓ **Megoldás:**

A kihúzott számok szorzata akkor páros, ha van páros szám a kihúzottak között.	1 pont
A komplementer eseteket figyelembe véve, számoljuk össze azokat az eseteket, amelyekben a kihúzott számok szorzata páratlan! Ez ugyanis csak akkor lehetséges, ha minden kihúzott szám páratlan. <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>	1 pont
Az 1-től 90-ig terjedő pozitív egész számok között 45 páratlan van. <i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>	1 pont
Ezek közül ötöt $\binom{45}{5} = 1\,221\,759$ -féle módon tudunk kiválasztani.	1 pont
Az összes lehetőségek száma: $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$.	2 pont
Így azon esetek száma, amikor a kihúzott számok között van páros, s ezáltal a kihúzott számok szorzata is páros: $\binom{90}{5} - \binom{45}{5} = 42\,727\,509$.	2 pont
Összesen:	8 pont

Gráfok

Definíció: Gráfnak nevezzük azon pontok (vagy más néven csúcsok) és élek halmazát, ahol minden élre egy, vagy két pont illeszkedik, valamint minden él pontból indul ki és pontba érkezik.

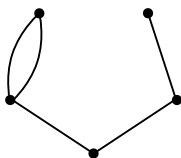
Megjegyzés: Az élek nem feltétlenül egyenes vonalak, s bár metszhetik egymást a gráf csúcsaitól különböző pontokban, de e metszéspontok nem csúcsai a gráfnak.



Gráfok

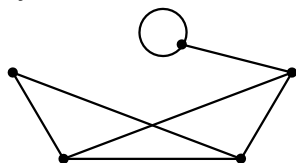
Definíció: Egy gráfot *véges gráfnak* nevezünk, ha csúcsainak száma véges.

Definíció: Ha a gráf két csúcsa több éllel is össze van kötve, akkor a két csúcs közti éleket *párhuzamos* vagy *többszörös él*nek nevezzük.



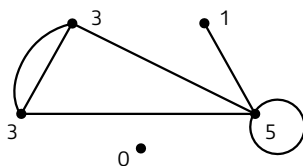
Gráf többszörös éllel

Definíció: Ha egy él két végpontja azonos, akkor azt az élt *hurokélnak* nevezzük.



Gráf hurokéllal

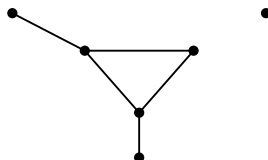
Definíció: Az egy csúcsból induló él számát a csúcs *fokszámának* nevezzük.



Gráf a csúcsok fokszámaival

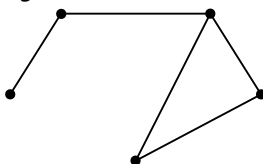
Megjegyzés: A hurokél a csúcsa fokszámánál kettőnek számít, mivel úgy tekintjük, hogy az adott csúcs a hurokél mindkét végpontja.

Definíció: *Izolált pontnak* nevezzük, az olyan pontot, amelyből nem indul ki él.



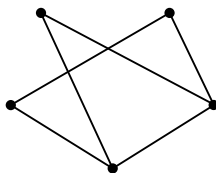
Gráf izolált ponttal

Definíció: Az olyan gráfot, amely tetszőleges csúcsából az élek mentén eljuthatunk bármelyik másik csúcsba, *összefüggő gráfnak* nevezzük.



Összefüggő gráf

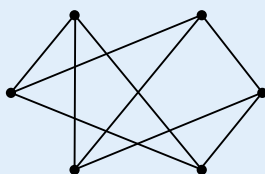
Definíció: Azt a gráfot, amely nem tartalmaz sem hurokélrt sem párhuzamos élt *egyszerű* vagy *ismeretségi gráfnak* nevezzük.



Egyszerű gráf

Feladat (I.): Egy 6 tagú társaságban mindenkinek három ismerőse van jelen. Szemléltessen gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.) **(2 pont)**

✓ **Megoldás:**



2 pont

Bármely más, helyes megoldás is maximális pontot ér.

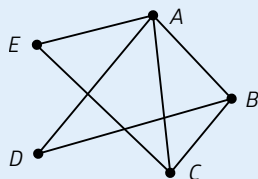
Feladat (II./B): Öt játékos egyfordulós pingpong körmérkőzést játszik egymással, egyesben. András már játszott Beával, Cilivel, Dénessel és Elemérrel is, és ezen kívül Bea játszott már Cilivel és Dénessel is. Tudjuk, hogy Elemér játszott Cilivel is.

a) Szemléltesse gráffal az eddig lejátszott mérkőzéseket! **(2 pont)**

b) Kiderült, hogy ketten eltitkolták, hogy játszottak egymással, így egyedül Dénesnek volt a legkevesebb lejátszott mérkőzése ebben a játéksorozatban. (Válaszát indokolja!) **(3 pont)**

✓ **Megoldás:**

a)



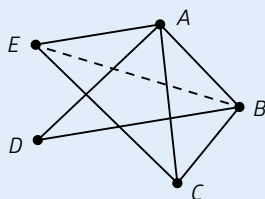
2 pont

b)

Jelenleg Elemérnek és Dénesnek is 2-2 lejátszott mérkőzése van, s ez a legkevesebb. Így Elemérnek játszania kellett még valakivel, hogy neki is kettőnél több lejátszott mérkőzése legyen. Ez vagy Bea, vagy Dénes. Dénes nem lehet, mert akkor neki, Beának, Cilinek is és Elemérnek is 3-3-3-3 lejátszott mérkőzése lenne, s az lenne a legkevesebb.

2 pont

Így Elemér és Bea titkolóztak.	1 pont
Összesen:	3 pont



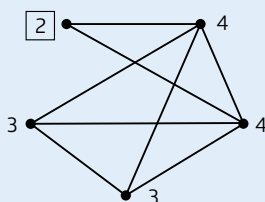
1 pont

Összesen:

3 pont

(3 pont)

✓ **Megoldás:**



2 pont

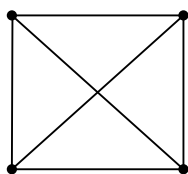
Az ötödik csúcs fokszáma 2.

1 pont

Összesen:

3 pont

Definíció: Az olyan egyszerű gráfot, amelynek bármely két csúcsát él köti össze *teljes gráfnak* nevezzük.



4 csúcsú teljes gráf

Tétel: Az n csúcsú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

(3 pont)

✓ **Megoldás:**

1 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Így a kézfogások száma: $\frac{8 \cdot (8-1)}{2}$.

1 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

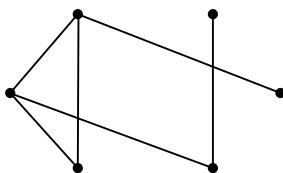
Azaz 28 kézfogás történt.

1 pont

Összesen:

3 pont

Feladat (II./B): Hat csapat közötti lejátszott mérkőzéseket szemlélteti az alábbi ábra. Az összes mérkőzések hány százaléka van még hátra, ha minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik? **(6 pont)**



✓ **Megoldás:**

A mérkőzéseket úgy is tekinthetjük, mint egy olyan 6 csúcsú teljes gráf éleit, amelynek csúcsai a csapatok.

1 pont

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Így az összes mérkőzések száma: $\frac{6 \cdot (6-1)}{2} = 15$.

2 pont

Eddig 6 mérkőzést játszottak le, így még $15 - 6 = 9$ mérkőzés van hátra.

1 pont

Ekkor $\frac{9}{15} = 0,6$.

1 pont

Így az összes mérkőzések 60%-a van még hátra.

1 pont

Összesen:

6 pont

Tétel: Bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege az élek számának kétszeresével egyenlő (tehát páros).

Megjegyzés: A fenti tétel egyik gyakran használt következménye, hogy véges gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.