Érdekességek

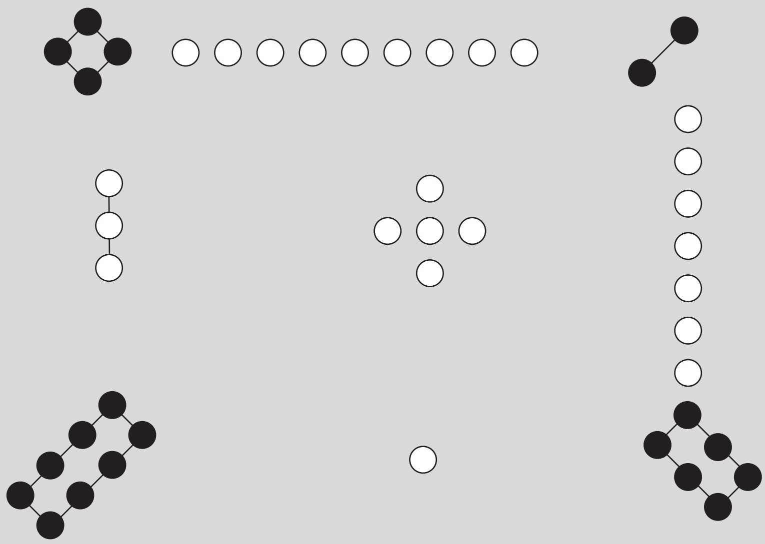
Bűvös négyzet

A bűvös négyzettel és Dürerrel már találkozhattál az 5. osztályos Kompetenciaalapú feladatgyűjteményben, ezt szeretnénk kiegészíteni.
A bűvös négyzet érdekes, sok szabályszerűséget mutató számelrendezés. Az emberiség játékaihoz már a legrégebbi idők óta hozzátartozik, mint például a sakk. Mágikus négyzet (bűvös négyzet) matematikai játék, eredete egész az ókorig vezethető vissza, de valószínű, hogy még sokkal régebbi. Indiai eredetű, és Arábián keresztül jutott el hozzánk. Régen a bűvös négyzetek az emberekben félelmet, tiszteletet váltottak ki, az elkészítésük bűvészetnek látszott. Az elnevezés is innen jöhetett. Voltak, akik kihasználták a tudatlan emberek hiszékenységét, és bűvös négyzettel díszített, "bajoktól megvédő" amuletteket árultak. Akik ilyen számösszeállításokat készítettek, sokszor boszorkányság vádjával még fogságba is estek.
A bűvös négyzetben nincs semmi bűvészet, csak a szabályszerűség értése, tudása.
Érdekessége az, hogy különböző vonalakon más-más számok állnak együtt, az összeg mégis ugyanaz.
Bűvös négyzetnek nevezzük a megadott számoknak négyzet alakban való olyan elrendezését, amelyben a számok összege minden sorban, oszlopban és átlóban is megegyezik. Ezt az összeget a bűvös négyzet számának "bűvös összegnek", az oszlopban, illetve a sorokban lévő számok számát a bűvös négyzet rendjének, illetve rendszámának nevezzük.
Készíts bűvös négyzetet!
Rajzolj egy négyzetet, és oldalaival párhuzamosan azonos számú sorra és oszlopra oszd fel!
A legegyszerűbb bűvös négyzet a 3 × 3-as, amely 3 sorból és 3 oszlopból áll.
Töltsd meg ezt az ábrát egymás utáni természetes számokkal úgy, hogy minden kis mezőbe egy szám jusson, és a számok összege minden sorban, minden oszlopban és mindkét átló mentén ugyanannyi legyen!

Az egyik legrégebbi dokumentum a bűvös négyzetekről Albrecht Dürer (1471-1528) magyar származású festő és grafikus Melankólia című rézmetszetén található, amelyen egy műszaki és matematikai kutatást megszemélyesítő allegorikus alak látható. Ez a bűvös négyzet 4 × 4-es, amely páros rendszámú.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ennek a bűvös négyzetnek a bűvös száma vagy "állandója" 34, tehát a számok összege minden sorban, oszlopban és átlóban 34.
A Dürer képén látható bűvös négyzetben a számok 1-16-ig szerepelnek.
A Dürer képén található bűvös négyzet jellemzője még, hogy például a négy sarok és a négy középső mező összege is 34-et ad. Az alsó sor közepén található 1514 pedig a mű keletkezésének évszámát jelöli.
Ez az évszám a magyar történelemben is fontos eseményt takar. Nézz utána!
Valószínűleg a kínaiak készítették az első bűvös négyzetet. Egy 6000 éves kínai könyvben van egy olyan ábra, amelyben a számokat körökkel helyettesítették. A fekete körök a páros ("női"), a fehérek pedig a páratlan ("férfi") számokat jelölték.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

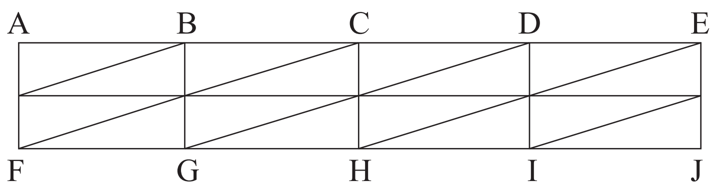
Kiköthetjük, hogy a 3 × 3-as bűvös négyzetbe 1-9-ig legyenek számok. A kilenc szám összege 45, így a hármasok összege csak 15 lehet, amit összesen 8-féleképpen írhatunk fel az adott kilenc számból:
9-5-1, 9-4-2, 8-6-1, 8-5-2, 8-4-3, 7-6-2, 7-5-3, 6-5-4.
Az egyetlen négyszer is előforduló szám az 5-ös, ezért ő kerül középre, mivel négy hármasnak is része. A sarkokra csak 8, 6, 4, 2 kerülhet, mert három hármasban szerepel.

8		6
	5	
4		2

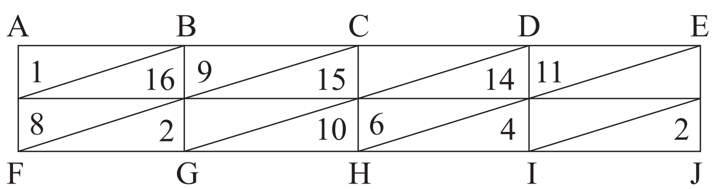
1. Innen már egyszerű a maradék négy szám beírása, neked is sikerülni fog.
Kínában találtak olyan, fémlemezből készült régi amulettet, amelyre ezt a bűvös négyzetet nem számjegyekkel vésték rá, hanem a mezőkbe megfelelő számú lyukat fúrtak.
(Forrás: B. A. Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

Bűvös szalag

2. A téglalap 16 kis háromszögből áll. Négy-négy egymás melletti kis háromszög, egy nagyobb háromszöget alkot.



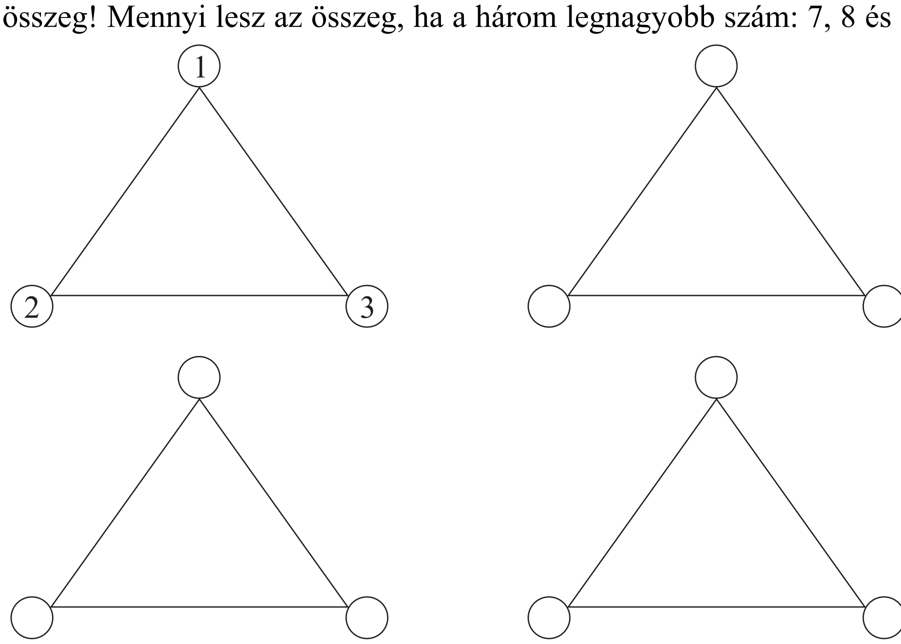
Az 1 és a 16 közötti természetes számokat úgy kell beírni a kis háromszögekbe, hogy az ábráról leolvasható nagy háromszögekben a számok összege ugyanannyi legyen. Ilyen nagy háromszög az ACF, BDG, CEH, CFH, DGI, EHJ háromszög. Mindegyikben négy-négy szám van. Egészítsd ki az ábrát úgy számokkal, hogy mind a hat nagy háromszögben a számok összege 34 legyen!

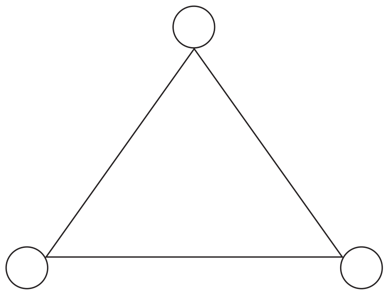


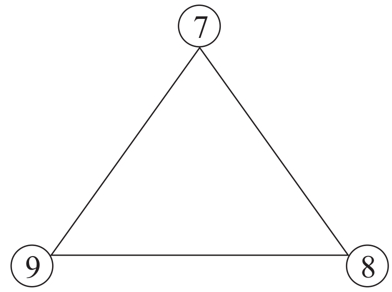
(Forrás: B. A. Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

Bűvös háromszögek

3. Írjuk a 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat párosával a háromszög oldalaira úgy, hogy a csúcsokat is beleszámítva a számok összege mindhárom oldalon összesen 17 legyen! A csúcsokban az 1, 2, 3 szám rögzített. Ha nem kötjük ki, hogy a három legkisebb szám kerüljön a csúcsokra, sok más megoldás is van. Helyezzétek el például a 9 számot úgy, hogy minden oldalon 20 legyen az összeg! Mennyi lesz az összeg, ha a három legnagyobb szám: 7, 8 és 9 kerül a csúcsokra?



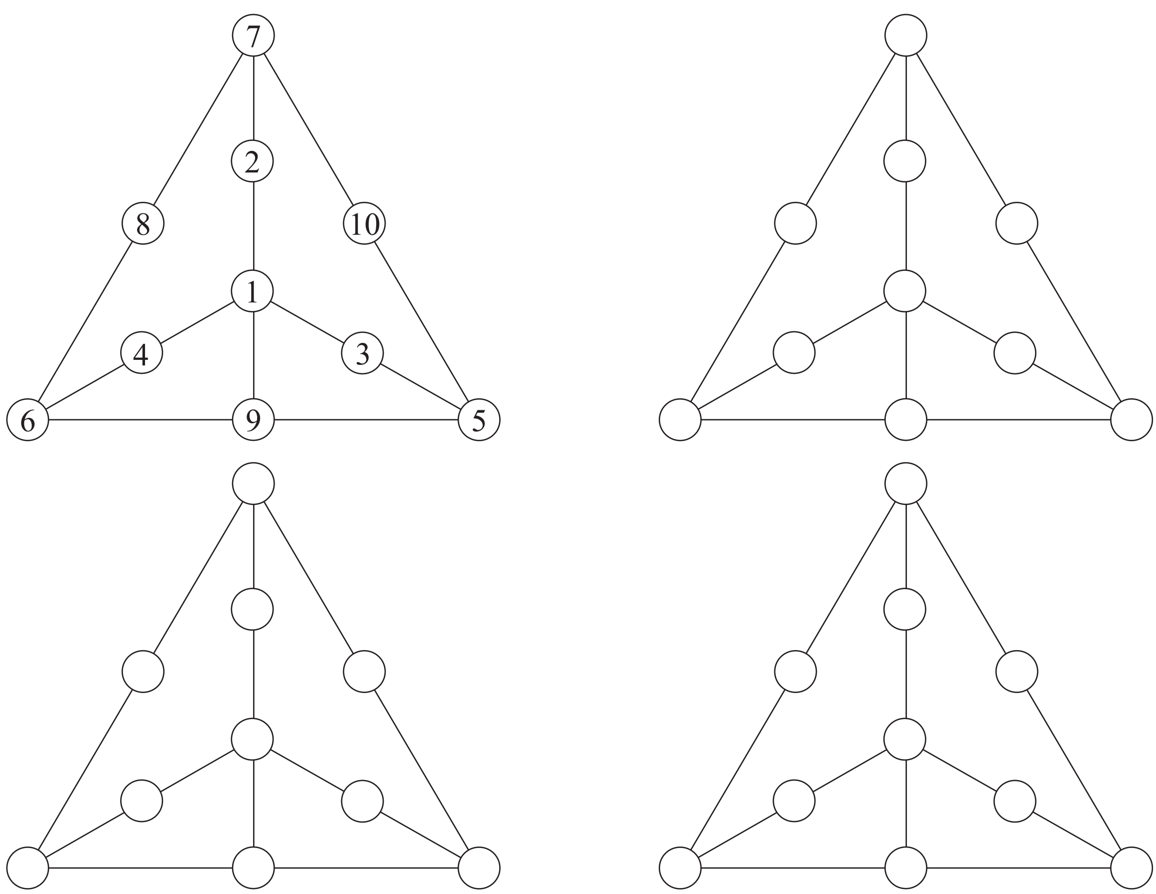


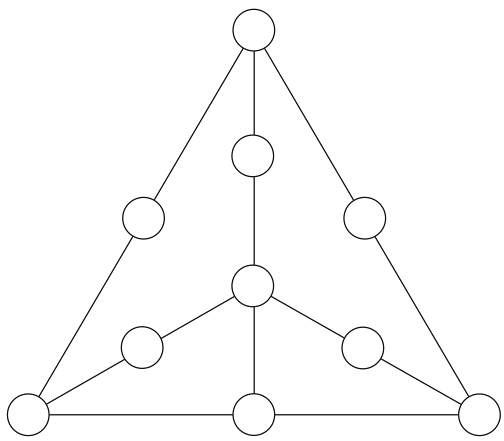


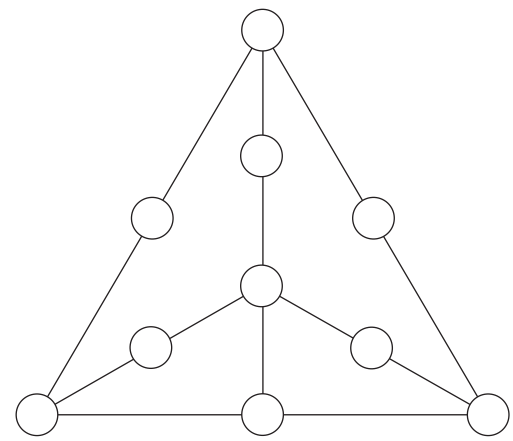
(Forrás: B. A. Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

Bűvös kerületek

4. Az ábrán 10 kis kört találtok. Úgy kell beírni 1-től 10-ig a természetes számokat, hogy mind a három kis háromszög kerületén a hat szám összege pontosan 28 legyen! (Természetesen a nagy háromszög kerületén levő számok összege nem ennyi lesz!). A 10-ig a számokat úgy is csoportosíthatjuk, hogy a kis háromszögek mentén vett összegek 28 helyett 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 legyenek. Próbálkozz!



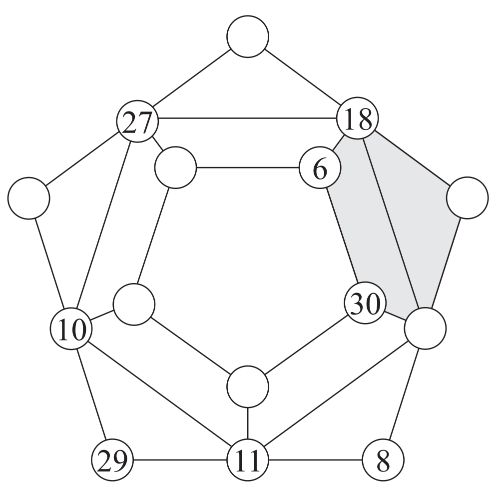


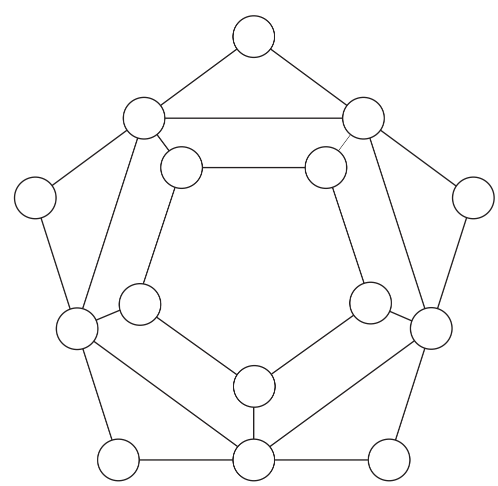


(Forrás: B. A. Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

Bűvös ötszögek

5. Töltsd ki a bűvös ötszöget!
Az ábrán nyolc ötszög található (öt kisebb és három nagyobb). Töltsd ki a még üres kis köröket 1 és 30 közötti számokkal úgy, hogy mind a nyolc ötszög csúcsain levő számok összege 90 legyen!





(Forrás: Dr. Enyedy Andor Református Általános Iskola, Óvoda és Bölcsőde 3450 Mezőcsát Szent István út 1-2. web: www.enyedy.bicomix.hu e-mail: enyedy.mezocsat@freemail.hu Törd a fejed! tehetséggondozó matematikaverseny 4.osztály DÖNTŐ 2016.március 18.)

Próbálj meg te is ilyen bűvös ötszöget készíteni!

Halmazok, kombinatorika

1. Adott az A és B halmaz, melynek elemei:
A = {a 20-nál nem nagyobb természetes számok}, B = {18 osztói}.
Készíts halmazábrát!

Milyen kapcsolat van a két halmaz között?

A B halmaz .... az A halmaznak.
Sorold fel a $\overline{B}$ halmaz elemeit! (Tekintsd az A halmazt alaphalmaznak!)

$\overline{B}$ = {...}.

2. Sorold fel a következő halmazok elemeit, majd készíts halmazábrát, és rendezd el benne őket!
E = {30-nál nem nagyobb 4-gyel osztható természetes számok} = {..}

G = {40-nél kisebb négyzetszámok} = {...}

Írd fel a következő halmazok elemeit!

$E \cup G$ = {...} $G \cup E$ = {...}

$E \cap G$ = {...} $G \cap E$ = {...}

$E \setminus G$ = {...} $G \setminus E$ = {...}

Figyeld meg a háromféle halmazműveletet! Melyik rendelkezik az összeadásnál és szorzásnál tapasztalt „felcserélhetőség” tulajdonságával?

....

3. Sorold fel a következő halmazok elemeit, majd készíts halmazábrákat, és rendezd el benne őket!

$A = \{6 \text{ osztói}\} = \{$...$\}$

$B = \{15 \text{ osztói}\} = \{$...$\}$

$C = \{10 \text{ osztói}\} = \{$...$\}$

4. Az előző feladat megoldásának felhasználásával írd fel a következő halmazok elemeit! (Tekintsd alaphalmaznak az $A \cup B \cup C$ halmazt!)

$A \cup B = \{$...$\}$ $\overline{A \cup B} = \{$...$\}$

$A \cap B = \{$...$\}$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \{$...$\}$

$A \setminus C = \{$...$\}$ $(A \cup B) \setminus C = \{$...$\}$

$(A \cup C) \setminus (A \cap C) = \{$...$\}$ $(A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{$...$\}$

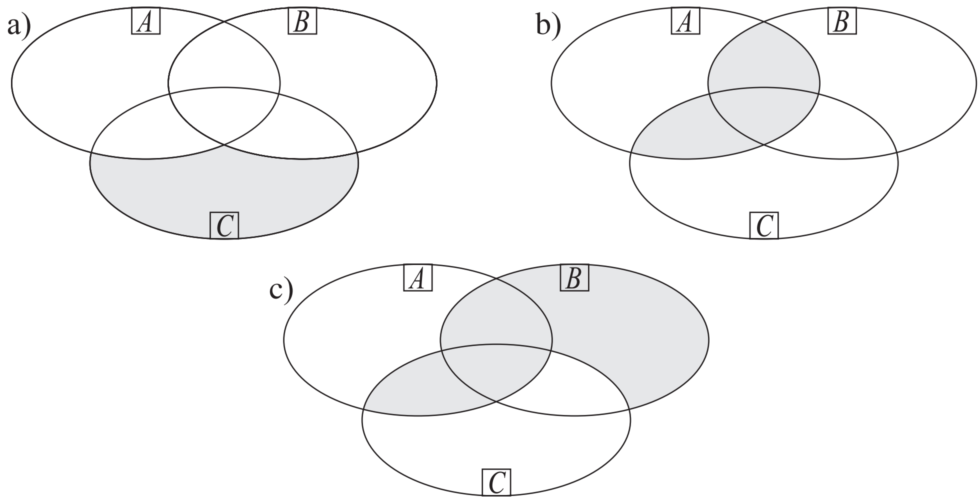
5. Szemléltesd a következő halmazok kapcsolatát halmazábra segítségével!
$A = \{\text{négyszögek}\}$ $P = \{\text{paralelogrammák}\}$
$T = \{\text{téglalapok}\}$ $R = \{\text{rombuszok}\}$

Mik tartoznak a következő halmazokba?

$P \cap T = \{$...$\}$

$T \cap R = \{$...$\}$

6. Fejezd ki a besatírozott részhalmazokat az *A*, *B* és *C* halmaz és a megfelelő halmazműveletek segítségével!



a) .... b) .... c) ....

7. Melyik halmaznak van több eleme? Írd a megfelelő relációjelet az üres négyzetbe! Döntésed számítással igazold!
A = {3-mal vagy 4-gyel osztható háromjegyű természetes számok}
B = {3-mal sem és 4-gyel sem osztható háromjegyű természetes számok}
$|A|$ (az A halmaz elemeinek száma) ☐ $|B|$ (a B halmaz elemeinek száma)

$|A|$ = ...; $|B|$ = ...
Indoklás:

8. Egy iskola tanulói között felmérést végeztek, hányan tudnak úszni, és hányan kerékpározni. A kérdőívet a tanulók 25%-a töltötte ki. A kérdőívek feldolgozásakor kiderült, hogy a válaszadók mindegyike legalább az egyik kérdésre igennel válaszolt. A válaszoló gyerekek 60%-a, jelezte, hogy tud úszni, 80%-a, hogy tud kerékpározni. A csak kerékpározni tudók száma 60.
Hány tanulója van az iskolának?

Az iskolának .... tanulója van.

9. Leírtuk egymás után 1-től 15 000-ig a természetes számokat, de úgy, hogy kihagytuk azokat, amelyekben előfordult a 2-es vagy az 5-ös számjegy.

a) Hány darab számot írtunk le?

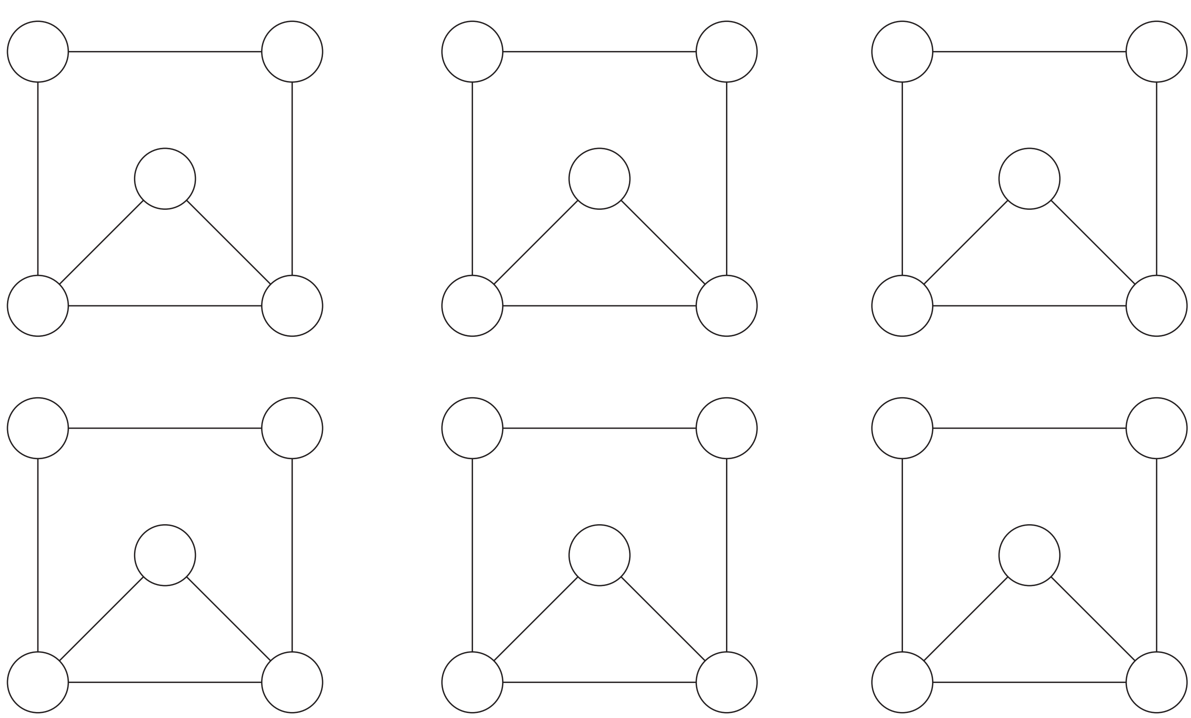
b) Hány darab számot hagytunk ki?

Az adott feltétel mellett .... darab számot írtunk le, és .... darab számot hagytunk ki.

10. Hány olyan legfeljebb háromjegyű természetes szám van, amelyik nem osztható 10-zel, és minden számjegye különböző?

Legfeljebb háromjegyű, különböző számjegyekből álló, tízzel nem osztható számból .... darab van.

11. Leírtuk az összes olyan kétjegyű természetes számot, amelyben a számjegyek hányadosa 3. Ezek közül kiválasztottunk 5 számot úgy, hogy a háromszög csúcsaiba kerülő három szám összege egyenlő legyen a négyzet csúcsaiba kerülő számok összegével.
Több megoldás is van, keress!



Sorba rendezés

1. Anna, Bea, Cili, Dóri és Edit moziba mennek.
a) Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé a nézőtéren?

b) Hányféle lehet a sorrend, ha Bea és Cili egymás mellett szeretne ülni?

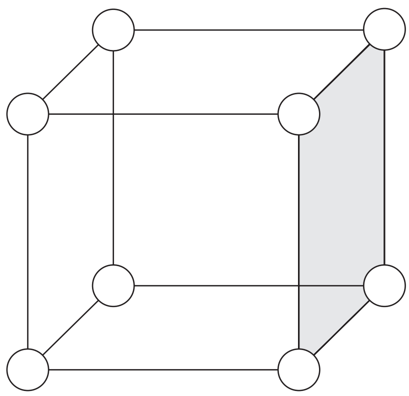
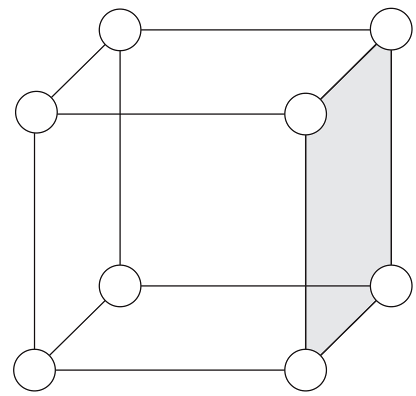
c) Hányféle lehet a sorrend, ha Bea és Cili nem szeretne egymás mellett ülni?

2. Az 1; 3; 5; 6; 8 számkártyák felhasználásával hány különböző háromjegyű, hattal osztható számot tudunk kirakni?

Az adott számkártyák felhasználásával .... darab különböző háromjegyű, hattal osztható szám képezhető.

3. Írd le az összes olyan kétjegyű számot, amelyben a számjegyek szorzata legfeljebb 3!
Válassz ki közülük 9-et, és írd be őket a négyzetekbe úgy, hogy minden sorban, oszlopban és átlókban az összegük 150 legyen!

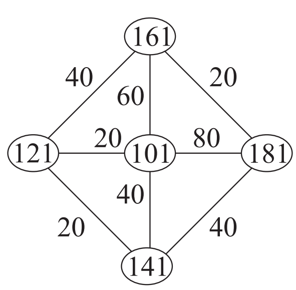
4. A kocka csúcsaiba helyezd el 1, …, 8-ig a számokat úgy, hogy mindegyik lap mind a négy csúcsába írt számok összege 18 legyen!

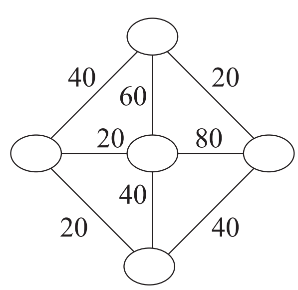



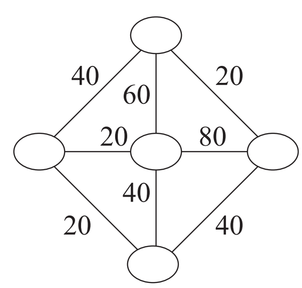
5. A 0; 0; 0; 2; 2; 2 számkártyák felhasználásával hány különböző hatjegyű természetes szám képezhető?

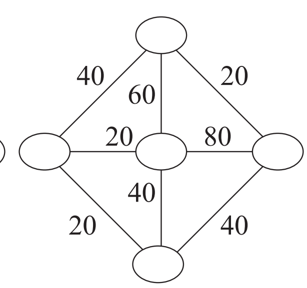
Az adott számkártyák felhasználásával .... különböző hatjegyű szám képezhető.

6. Sorold fel a 200-nál nem nagyobb palindrom számokat! (Palindrom számnak nevezzük azokat a számokat, amelyek elölről és visszafelé olvasva is ugyanazt a számot jelenti. Pl. 353, 585,…) Válassz ki közülük 5 számot, és helyezd el az ábrában úgy, hogy a vonallal összekötött két - két szám különbsége annyi legyen, mint a vonalra írt szám!









7. Az iskolai diákönkormányzat tagjai közé minden osztályból két főt kell delegálni. A hetedik osztályba 18 lány és 12 fiú jár.

a) Hányféleképpen választhatjuk ki a gyerekek közül a két DÖK tagot?

b) Hogyan változik a lehetőségek száma, ha egy lányt és egy fiút kell választani?

8. Zoli egy fiókban tartja a zoknijait nagy-nagy összevisszaságban. 10 darab fehér, 14 darab fekete és 8 darab barna azonos méretű zokni lapul a fiókban. Hány darabot kell véletlenszerűen kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük

a) 1 pár barna zokni?

b) 2 pár fekete zokni?

c) 3 pár fehér zokni?

9. Egy dobozban azonos méretű golyók vannak: 20 piros, 25 zöld, 30 fehér és 15 kék. Hány darabot kell véletlenszerűen kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük

a) legalább két piros?

b) két különböző színű?

c) 1 zöld és 1 fehér?

d) minden színből legalább 1 darab?

10. Hányféleképpen olvasható ki az INTERNET szó az alábbi elrendezésekből?

a)

I	**N**	**T**	**E**	**R**
N	**T**	**E**	**R**	**N**
T	**E**	**R**	**N**	**E**
E	**R**	**N**	**E**	**T**

b)

I	**N**	**T**	**E**	**R**
N	**T**	**E**	**R**	**N**
T	**E**	**R**	**N**	**E**
E	**R**	**N**	**E**	**T**
R	**N**	**E**	**T**	
N	**E**	**T**		
E	**T**			
T				

....

c)

I

N N

T T T

E E E E

R R R R R

N N N N N N

E E E E E E E

T T T T T T T T

....

d)

I

N N N

T T T T T

E E E E E E E

R R R R R R R

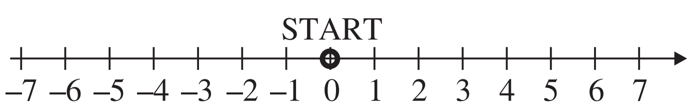
N N N N N

E E E

T

....

11. Béka Béla ugrál a számegyenesen. Minden ugrása 1 egység hosszú. Az origóból indulva jobbra vagy balra ugorhat.



a) Hányféle úton juthat el a +3-ra, ha összesen 7-et ugrott?

b) Eljuthat-e 14 ugrással a +5-re?

12. Egy 8 fős társaság kibérel egy 3 fős csónakot. Hányféleképpen választhatják ki a csónakba ülő három személyt?

13. Az osztályok közötti váltóversenyre 6 fős csapatot kell kiválasztani, amelyben legalább 2 lány van. A 7. a osztályban 10 fiú és 4 lány jelezte részvételi szándékát. Hányféleképpen választhatják ki közülük a váltóverseny csapatát?